INTEGRALI S PARAMETROM

Variramo integrand: $F(x) = \int_0^x x f(t)\,dt$

Variramo meje integrala $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Osnovni izrek analize $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

Izrek 1:

Naj bo $f(x,t)$ zvezna na $[a,b]\times[c,d]$. Potem je tudi integral $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$ zvezen na $[a,b]$.

Dokaz:

Funkcija f je zvezna v točki $(x_0,t_0)\in[a,b]\times[c,d]$ če za $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0$, da iz $\sqrt{(x-x_0)^2+(t-t_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,t)-f(x_0,t_0)| < \varepsilon$

Ključno dejstvo: δ je odvisna od x_0, t_0 in ker nas zanimajo le $t_0\in[c,d]$, obstaja

$$\delta := \min_{\substack{t_0\in[c,d]\\ x_0\in[a,b]}} \delta(x_0,t_0)$$

Če torej izberemo $x, x_0 \in [a,b]$ tako, da je $|x-x_0|<\delta$:

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^d f(x_0,t)\,dt\right|$$

$$\le \int_c^d |f(x,t)-f(x_0,t)|\,dt \underset{f(x,t)\text{ zvezna}}{\le} \int_c^d \varepsilon\,dt = \underline{\underline{\varepsilon(d-c)}}$$

Izrek 2:

Naj bo $f(x,t)$ zvezna in parcialno zvezno odvedljiva po x na $[a,b]\times[c,d]$. Potem je funkcija $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$ odvedljiva na $[a,b]$ in njen odvod je $\int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$.

Dokaz:

Lagrange:

g zv. na $[a,b]$ in odv. na (a,b). $\exists c\in(a,b)$:

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

$$g(b)-g(a) = g'(c)(b-a)$$

Izberemo ξ med x in x_0, da pri fiksnem $t\in[c,d]$ velja:

$$f(x,t)-f(x_0,t) = f_x(\xi,t)(x-x_0)$$

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^d f(x_0,t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^d (f(x,t)-f(x_0,t))\,dt\right) \underset{\text{lagrange}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cancel{x-x_0}}\int_c^d f_x(\xi,t)\,\cancel{(x-x_0)}\,dt =$$

$$\underset{\text{lagrange}}{=} \int_c^d \lim_{x\to x_0} f_x(\xi,t)\,dt \underset{\text{zveznost } f_x}{=} \int_c^d f_x\left(\lim_{x\to x_0}\xi, t\right)dt = \underline{\underline{\int_c^d f_x(x_0,t)\,dt}}$$

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$$

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)\,dt + v'(x)\, f(x, v(x)) - u'(x) f(x, u(x))$$

Izrek 3:
Naj bo $f(x,t)$ zvezna na $[a,b] \times [c,d]$. Potem je funkcija $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$ integrabilna na $[a,b]$ in velja $\int_a^b F(x)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dx\right) dt$

Dokaz:
Iz izreka 1. vemo, da je F zvezna na $[a,b]$ in posledično integrabilna.

Definirajmo dve zvezni funkciji:

$$G(x) = \int_a^x F(s)\,ds$$

$$H(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(s,t)\,ds\right) dt$$

Želimo $G(b) = H(b)$.

$G'(x) = F(x)$ ... osnovni izrek analize

$$H'(x) = \int_c^d \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f(s,t)\,ds\right) dt = \int_c^d f(x,t)\,dt = F(x)$$

Torej $G(x)$ in $H(x)$ se razlikujeta za konstanto

$G(a) = 0$

$H(a) = 0$ $\qquad C = 0$

Izboljšava izreka 2:

Naj bosta $u, v : [a,b] \to [c,d]$ odvedljivi, ter je $f(x,t)$ parcialno zvezno odvedljiva po x na ~~$[a,b]_x \times [c,d]_t$~~ $[a,b]_x \times [c,d]_t$. Potem je odvedljiva tudi:

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$$

In $$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)\,dt + v'(x)\, f(x, v(x)) - u'(x) f(x, u(x))$$

POSPLOŠENI OZ. IZLIMITIRANI INTEGRAL S PARAMETROM

1. Neomejen interval: $\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$

Obstaja kadar je $f(t)$ v $t=\infty$ obnaša kot $\frac{1}{t^\alpha}$ za $\alpha > 1$.

2. Neomejena funkcija:

$$\int_a^b f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neomejena} \\ \text{v } a}}{=} \lim_{a' \searrow a} \int_{a'}^b f(t)\,dt = F(b) - \lim_{a' \downarrow a} F(a')$$

Obstaja kadar je $f(t)$ v a obnaša kot $\frac{1}{t^\alpha}$ za $\alpha < 1$

Enakomerna konvergenca:

Integral $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ je enakomerno konvergenten na $x \in [c,d]$, če za $\forall \varepsilon > 0\ \exists b > a$ da $\left|\int_b^\infty f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$ za vse $x \in [c,d]$.

Trditev (majorizacija):

Če $\exists g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funkcija za katero velja $|f(x,t)| < g(t)$ za $\forall x \in [c,d]$ in je $\int_a^\infty g(t)\,dt < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$.

Posplošitev 3eh izrekov:

① Naj bo $f(x,t)$ zvezna na $[c,d]_x \times [a,\infty)_t$ in **$F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$**. Potem je $F(x)$ zvezen na $[c,d]$.

② Naj bo $f(x,t)$ zvezna in zvezno parc. odvedljiva po x na $[c,d] \times [a,\infty)$ ter naj bo **$F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ konvergentna na $[c,d]$ in $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$.**
Potem je $F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$.

③ Naj bo $f(x,t)$ zvezna na $[c,d]_x \times [a,\infty)_t$ in **$F(x) = \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enak. konv. na $[c,d]$.**
Potem velja:
$$\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right) dt$$

GAMA IN BETA FUNKCIJI

Gama: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ $\quad D_f = (0,\infty)$

Beta: $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ $\quad p,q>0$

Izrek:
$\Gamma(x)$ je zvezna na $(0,\infty)$:

Dokaz: Naj bo $\varepsilon>0$ in $M>0$. Dokazali bomo, da je Γ enakomerno konvergenten integral na $[\varepsilon, M]$.

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

v bližini 0 se obnaša kot t^{x-1} $\quad t^{x-1}e^{-t} < t^{M-1} e^{-t} \leq t^{M-1}\frac{1}{t^{M+1}}$

$\int_0^1 t^{\varepsilon-1} + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ konvergirata $\Rightarrow \Gamma$ enak. konv.

Trditev:
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $\forall x>0$

Dokaz: $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

$u = t^x \quad dv = e^{-t}dt$
$du = x\cdot t^{x-1}dt \quad v = -e^{-t}$

$= 0 + x\cdot\Gamma(x)$

Posledica: $\Gamma(n) = (n-1)!$ za $n\in\mathbb{N}$

Izrek:
$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, za vse $p,q>0$ ($\Rightarrow B$ je zvezna in simetrična)

Dokaz:
$t = \frac{u}{u+1} \quad dt = \frac{1}{(u+1)^2}du$

$$B(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{p-1}\left(1-\frac{u}{u+1}\right)^{q-1}\frac{1}{(u+1)^2}du = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(u+1)^{p+q}}du$$

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty t^{p+q-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (1+u)^{p+q-1} s^{p+q-1} e^{-(1+u)s}(1+u)ds$$

$t = (1+u)\cdot s$
$dt = (1+u)ds$

$$= (1+u)^{p+q}\int_0^\infty s^{p+q-1}e^{-(1+u)s}ds$$

$$\Gamma(p+q)\cdot\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^\infty u^{p-1}\left(\int_0^\infty s^{p+q-1}e^{-(1+u)s}ds\right)du$$

Na levi tako dobimo $\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$. Na desni pa po obrnitvi integracije dobimo $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$. $\square$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

VECTERNI INTEGRAL

Želimo definirati integral n spremenljivk na neki omejeni množici $D \subset \mathbb{R}^n$.

Za $n=1$. Smo definirali n darbouxevo vsoto.

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} M_j \, (x_j - x_{j-1})$$

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} m_j \, (x_j - x_{j-1})$$

$$\sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Obstaja pa ekvivalentna Riemanova definicija:
Ta ima poleg delilnih točk x_j še testne točke $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$

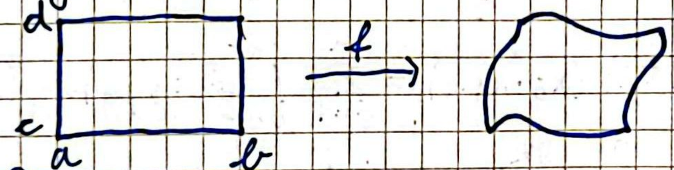
$$R(f,D,T) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\,(x_j - x_{j-1}) \quad \text{Riemanova vsota}$$

Torej:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D) = \mathcal{R}(f,D,T)_{\max(x_j - x_{j-1}) \to 0}$$

Definirajmo za $n=2$:

Imejmo $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Torej f. dveh spremenljivk omejena na pravokotniku.



Delitev D: $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 \cdots < y_m = d$

$P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ .... majhni pravokotniki

$pl_{ij} = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$

① Darbouxjevi vsoti:

$M_{ij} = \sup_{x \in P_{ij}} f(x)$, $m_{ij} = \inf_{x \in P_{ij}} f(x)$

$$S(f,D) = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij}\, pl_{ij} \quad , \quad s(f,D) = \sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij}\, pl_{ij}$$

Če velja $\inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D)$ je integ.

② Rieman:

$t_{ij} \in P_{ij}$

$$R(f,D,T) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(t_{ij}) \cdot pl_{ij}$$

$$\lim_{\substack{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0 \\ \max(y_j - y_{j-1}) \to 0}} R(f,D,T) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

Lastnosti:

1. $\iint_D 1\,dx\,dy = S(D)$ ... ploščina $\iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = Vol(\Omega)$ ... volumen

2. $\iint_D (\alpha f)\,dx\,dy = \alpha \iint_D f\,dx\,dy \quad \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\iint_D (f+g)\,dx\,dy = \iint_D f\,dx\,dy + \iint_D g\,dx\,dy$

4. $\left|\iint_D f\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f|\,dx\,dy$

5. $\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$, če $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

Fubinijev izrek:

Če je f integrabilna na $[a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ in je $x \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[a,b]$ za $\forall y \in [c,d]$, ter enako $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$ za $\forall x \in [a,b]$, potem velja:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Dokaz:

$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ za $x \in [a,b]$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx$$

Rieman:

$$R(g,D,J) = \sum_{j=1}^{n} g(t_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f(t_j,y)\,dy\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\int_c^d f(t_j,y)\,dy = \sum_{k=1}^{m} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(t_j,y)\,dy$$

Uporabimo izrek o srednji vrednosti:

$f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ za nek $c \in [a,b]$

$$f(t_j, s_k) = \frac{1}{y_k - y_{k-1}} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(t_j,y)\,dy$$

$\exists s_k \in [y_{k-1}, y_k]$

Torej:

$$R(g, D_x, J) = \sum_{j=1}^{n,m} f(t_j, s_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

$= R(f, D_x \times D_y, J \times \varphi)$

Ker je f integrabilna $\sup_{D_x \times D_y} s(f, D_x \times D_y) = \lim R(f, D_x \times D_y, J \times \varphi)$

$\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$

$\max(y_i - y_{i-1}) \to 0$

$= \inf_{D_x \times D_y} S(f, D_x \times D_y)$

Nove koordinate v dvojni integral:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \dots \text{ za enojni}$$

$$\boxed{\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(\varphi(t,s))\cdot|\det J_\varphi(t,s)|\,dt\,ds}$$

Pri čemer $\det J_\varphi \neq 0$ na φ in $\varphi(\Omega)\to\mathbb{R}^2$ reverzna.

Polarne koordinate:

$x = r\cos\varphi$ $\quad r \geq 0$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi\in[0,2\pi)$

$$|\det J| = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = r$$

Tri in večterni integral:

Enako definirano kot $n=2$:

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]\to\mathbb{R}$$

Delitev D:

$a_1 = x_0 < x_1 \dots < x_n = b_1$

$a_2 = y_0 < \dots < y_m = b_2$

$\vdots$

$a_n = l_0 < \dots < l_o = b_n$

$K_{ij\dots o} = [x_{i-1},x_i]\times\dots\times[l_{o-1},l_o]$

$V_{ij\dots o} = Vol(K_{ij\dots o})$

Nato pa analogno Riemanovo in Darbouxovo vsoto.

Fubini še vedno velja dokažeš pa ga induktivno.

Cilindrične koordinate:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ $\quad |\det J| = r$

$z = z$

Sferične koordinate:

$x = R\cos\varphi\cos\vartheta$ $\quad R\geq 0$

$y = R\sin\varphi\cos\vartheta$ $\quad \varphi\in[0,2\pi)$ $\quad |\det J| = R^2\cos\vartheta$

$z = R\sin\vartheta$ $\quad \vartheta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

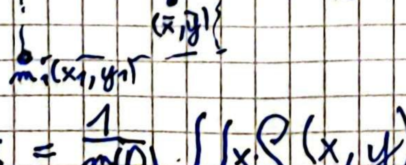
Uporaba:

a) Ploščina / volumen: $S(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$, $Vol(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$

b) Masa: $m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ $\quad m(\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

($\rho(x,y)$ gostota telesa v vsaki točki)

c) Masno središče:



$$\bar{x} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\cdot x_1 + m_2\cdot x_2)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\cdot y_1 + m_2\cdot y_2)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

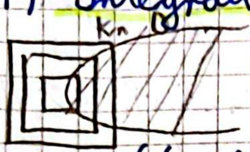
$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)}\iint_D y\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$$

d) Vztrajnostni moment:

$J(D) = \iint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$ $\quad J(\Omega) = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Posplošeni večterni integrali:

1) **Integrali po neomejenem liku $D \subset \mathbb{R}^2$**

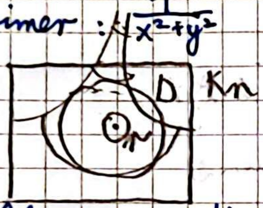


Izčrpanje v $\mathbb{R}^2$ za katero velja $\bigcup_{n=1} K_n = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy = \iint_D f\,dx\,dy$$

2) Integrali neomejene funkcije:
Izčrpanje z zaprtimi množicami, ki imajo lastnosti $K_{n+1} \supset K_n$ in $\bigcup_{n=1} K_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ ← točka neomejenosti

Primer: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ... Nedifiniran v $(0,0)$.



$$\iint_D f\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D\cap K_n} f\,dx\,dy$$

Lahko se zgodi dvoje: Integral v ∞ divergira ali pa je zaporedje omejeno in konvergira v tem primeru je limita tudi neodvisna od izčrpanja.

Posplošeni integral funkcij obeh predznakov:

Absolutna in pogojna konvergenca:

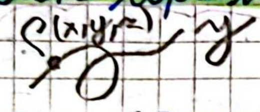
$\iint f\,dx\,dy$ **absolutno konvergenten**, če konvergira tudi $\iint_D |f|\,dx\,dy$. Če konvergira samo $\iint_D f\,dx\,dy$ pa pravimo, da **pogojno konvergira**.

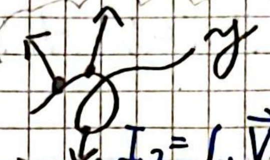
KRIVULJNI IN PLOSKOVNI INTEGRAL

1) <u>Skalarna polja</u>: $\rho : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t. j. predpisi, ki točki v $\mathbb{R}^3$ priredi skalar (npr. temp., gostota, potencialna energija)
Gostota: $M = \int_V \rho(r)\,dV$, Potencialna: $W_p = mgh$ $\quad F = -\nabla W_p^{\,V(r)}$

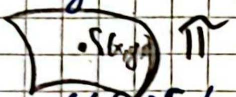
2) <u>Vektorska polja</u>: $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Točki priredimo vektor (npr. polje sil, tenzorji)
Tenzorji: $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$, $(\nabla V)_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$

Štiri tipi integralov:





$I_1 = \int_\gamma \rho\, ds$ (gostota, masa) $\qquad$ $I_2 = \int_\gamma \vec{V} d\vec{s}$ (polje sil, delo)



$I_3 = \iint_\pi \rho\, dS$ (gostota, masa) $\qquad$ $I_4 = \iint_\pi \vec{V} d\vec{S}$ (polje sil, pretok)

integrali prve vrste $\qquad$ integrali druge vrste

Podajanje krivulj v prostoru:

i) Explicitno: $\mathbb{R}^2: y = f(x)$, $\mathbb{R}^3: y = f(x), z = g(x)$
ii) Implicitno: $\mathbb{R}^2: F(x,y) = 0$, $\mathbb{R}^3: F(x,y,z) = 0,\ G(x,y,z) = 0$
Mora veljati izrek o implicitni:
$F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ v taki točki lahko rešimo enačbo $F(x,y) = 0$ za y ~~kot~~ kot funkcijo x.
iii) Parametrično: $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$.
$|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0$ (intuitivno: nimamo ostrih kotov, stacionarnih točk), tega ne želimo zaradi izgube smeri v taki točki in posledično problemih pri izračunavah (primer: $r(t) = (t^3, t^2)$ v točki 0.)

Naravna parametrizacija:

Definiramo dolžino: $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt$

Naravna parametrizacija je taka pri kateri je: $|\dot{\vec{r}}(t)| = 1$.

Definicija krivuljnih integralov:

$$I_1 = \int_\gamma \rho\, ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt$$

$$I_2 = \int_\gamma \vec{V} d\vec{s} = \int_a^b \vec{r}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$$

skalarno množenje

~~Ti~~ Integrali so neodvisni od parametrizacije pri I_2 se edino spremeni predznak glede na orientacijo.

Ploskve v prostoru:

Podamo lahko na tri načine: implicitno, eksplicitno, parametrično.

Parametrično: $\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; pri čemur $\vec{r}(D) = \Pi$ ← ploskev
in velja $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ v vsaki točki $(u,v) \in D$
(tako se znebimo vzporednosti in ničelnih vektorjev)

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)} = \sqrt{\underbrace{(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)}_{E}\underbrace{(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v)}_{G} - \underbrace{(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)}_{F}{}^2}$$

Dokaz: $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = |\vec{r}_u||\vec{r}_v| \sin\varphi =$

$$= |\vec{r}_u|\,|\vec{r}_v| \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{(|\vec{r}_u||\vec{r}_v|)^2\left(1 - \left(\frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|}\right)^2\right)} =$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \cos\varphi$$

$$= \sqrt{(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}$$

Definicija ploskovnih integralov:

Ploskovni integral skalarnega polja: $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
Ploskovni integral vektorskega polja $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

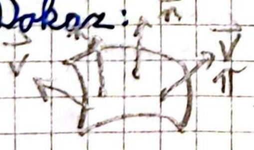
$$I_3 = \iint_\Pi \rho \, dS = \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

$\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija za Π.

Ne pozabit: Vsako gladko (diferenciabilno) krivuljo v evklidskem prostoru se da parametrizirat (problemi nastanejo pri fraktalih)

$$I_4 = \iint_\Pi \vec{V} d\vec{S} := \iint_\Pi \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \pm \iint_D [\vec{V}(\vec{r}(u,v)), \vec{r}_u, \vec{r}_v] \, du dv$$

Dokaz:



Nas zanima pretok polja $\vec{V}$. Pri tem je smiselno meriti pretok le v pravokotni smeri (razbijemo vektor $\vec{V}$ na vzporedno in pravokotno komponento)

$proj_{\vec{n}} \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{n}$

$$\iint_\Pi \vec{V} d\vec{S} = \iint_\Pi \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

Kaj pa je $\vec{n}$ ⇒ $\underbrace{\pm}_{\text{usmerjenost}} \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ ← smer, ↖ dolžina

$$\pm \iint_D \vec{V}(\vec{r}(u,v)) \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv = \pm \iint_D [\vec{V}(\vec{r}(u,v)), \vec{r}_u, \vec{r}_v] \, du dv$$

INTEGRACIJA KOMPLEKSNIH FUNKCIJ

$f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Želimo izražati kompleksnih funkcij z realnimi na tak način lahko nesemo izreke iz realnih v kompleksne funkcije.

Vsako kompleksno število lahko zapišemo kot:
$z = x + iy$ ($x = Re(z)$, $y = Im(z)$, $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota)

$f(z) = u(z) + i\,v(z)$ $u: D \to \mathbb{R}$ $v: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{C})$

Euler: $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Gre pa tudi v obratno smer:

$\boxed{x = Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$ $\boxed{y = Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$

Zaradi tega lahko zveznost kompleksnih funkcij vzamemo iz realnih.
f je zvezna v $a \in D$ $(D \subset \mathbb{C})$ n.t.k. je $f_{\mathbb{R}}$ zvezna v $(a_1, a_2) \in D_{\mathbb{R}}$ $(D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2)$.

Integracija:

Naj bo $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{C}$ parametrizacija krivulje γ.
Potem definiramo

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot (\dot{\vec{r}}(t))\,dt$$

kompleksno (basicly navadno) množenje

Primer:

$f(z) = z^2$ .... $[0, 1+i]$ $\vec{r}(t) = (t + ti)$ $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^1 (t + ti)^2 (1+i)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^2 i - t^2)(1+i)\,dt$$
$$= \int_0^1 (2t^2 i - 2t^2)\,dt = (2i - 2)\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2i-2}{3}$$

Kompleksni odvod in holomorfnost:

Kajn bi blo če bi lahko tko kot vse drugo potegnili iz realnih, torej:

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Problem:
$f(z) = \bar{z}$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Kam lahko grejo te limite:
$h = k \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \frac{k}{k} = 1$; $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$ $\lim_{h \to 0} \frac{-ik}{ik} = -1$ .... opazimo nekonsistenčnost glede na smer (enako kot limite 2-eh spremenljivk).

Holomorfnost:

Pravimo, da je $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna v $a \in D$ ali na D, če je kompleksno odvedljiva v $a \in D$ ali na D.

Izrek:
Naj bo $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija katere realni in imaginarni del u in v sta zvezno odvedljiva. Potem je f holomorfna na D n.t.k. zadošča:
$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

Holomorfna funkcija je taka pri kateri v kompleksnem zapisu nastopa le z in ne tudi $\bar{z}$.

Cauchyjev izrek:
Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ enostavno povezana odprta množica in $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna. Naj bo $\gamma \subset D$ zvezno zvezno odvedljiva krivulja, ki je sklenjena. Potem velja: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Izrek:
Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfna. Potem za $\forall$ točko $a \in D$ $\exists R > 0$, da lahko na disku $D(a,R) \subset D$ funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto:
$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots = \sum_{n=0} c_n (z-a)^n$ (holomorfne $\Rightarrow$ analitične)

Ideja dokaza: Naj bo $R > 0$ tak, da je $D(a,R) \subset D$. Uporabi se t.i. Cauchyjeva integracijska formula.
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$
Formula pove, da lahko za $z \in D(a,R)$ izračunajmo $f(z)$ z integralom po $\partial D(a,R)$ (velja le za holomorfne f)
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw \to$$
$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D(0,R)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Princip identičnosti: Denimo, da sta $f: D \to \mathbb{C}$ in $g: D \to \mathbb{C}$ holomorfni in velja $f \equiv g$ na odprti podmnožici D ali vsaj na množici, ki ima v D stekališče. Potem je $f \equiv g$ na celem.

Izrek o residuih:

Laurentov razvoj:

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ območje in f holomorfna na $D \setminus \{a\}$ za nek $a \in D$. Potem $\exists R > 0$, da lahko f na $D(a,R)$ razvijemo v Laurentovo vrsto:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

1. Odpravljiva singularnost: $c_n=0$ za $n<0$

2. Pol stopnje $k \in \mathbb{N}$, če je $c_n=0$ za $n<-k$.
   $(z-a)^k f(z)$ je holomorfna.

3. Bistvena singularnost: $\exists$ neskončno mnogo ne ničelnih koeficientov pri nekaterih negativnih potencah.

Def: f je meromorfna na $D \subset \mathbb{C}$, če ima le pole in odpravljive singularnosti

Izrek o residuih:
Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ brez lukenj, $f: D \to \mathbb{C}$ pa holomorfna na $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Naj bo γ sklenjena krivulja, ki singularnosti $\{a_1, \dots, a_n\}$ obkroži v poz. smeri.
Potem velja:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j)$$

Def:
Funkcija $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je harmonična, če zanjo velja:
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ na D

Izrek: Realni in imaginarni del holomorfne f. sta harmonični funkciji. (In sta harmonični konjungiranki)

Def:
Preslikava, ki ohranja kote in orientacijo rečemo konformna.
($f^2(z) \neq 0 \wedge f'(z) \neq 0$)

Inverzija:

$f(z) = \frac{1}{z}$ ... f. je def. na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0$

Kjer je def. je bijektivna, hkrati pa je tudi sama sebi inverzna $f(f(z)) = z$

Ta preslikava v geom. smislu zrcali preko y osi ~~na enotski krožnici~~ oz. čez enotsko krožnico.